



项目批准号	11501290
申请代码	A010704
归口管理部门	
收件日期	



20181111501290

# 国家自然科学基金 资助项目结题/成果报告

资助类别： 青年科学基金项目

亚类说明：

附注说明：

项目名称： Hamilton-Jacobi方程的广义特征线的研究

负责人： 张琦 电话： 02552119893

电子邮件： zhangqi@nuaa.edu.cn

依托单位： 南京航空航天大学

联系人： 韩薇 电话： 025-84892758

直接费用： 18.0000（万元） 执行年限： 2016.01-2018.12

填表日期： 2019年01月16日

国家自然科学基金委员会制（2016年）



## 项目摘要

### 中文摘要:

我们主要研究Hamilton-Jacobi 方程粘性解的奇点动力学, 以及它在Mather理论及弱KAM 理论中的应用。在大于Mane 临界值的能量面上, 弱KAM 不存在孤立奇点。奇点的动力学及其稳定性与Aubry 类的拓扑结构、共轭点的产生与消失, 粘性解以及障碍函数的正则性, 局部极小轨道的构造有着密切的联系。我们利用最优控制理论与Hamilton 动力学相结合的方法, 拟解决以下问题: 1、找出Hamilton-Jacobi 方程粘性解奇点沿广义特征线的传播条件; 2、研究奇点传播与障碍函数关于上同调类具备某种正则性的关系; 3、给出带控制项的 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的变分结构。

### Abstract:

We will study the singularity dynamics and its stability problem of the viscosity solutions of the H-J equations with its applications to the Mather theory and the weak KAM theory, and its applications to the Hamiltonian dynamics. We know now that the singularity of the barrier functions will propagate on the supercritical energy surface as well as that of the weak KAM solutions. This research area will be great application of the optimal control theory to some deep results in Hamiltonian dynamics. We hope to solve the following problems:

1. We intend to find an analytic setting for the propagation of singularities on viscosity solutions along the generalized characteristics;
2. We want to study the relationship between the regulation of the barrier functions and the propagation of the singular points;
3. We shall give the variational constructions on the viscosity solutions of the H-J equations with the optimal control items.

**关键词 (用分号分开):** 哈密顿系统; 哈密顿雅可比方程; Mather理论; 弱KAM理论; 粘性解

**Keywords (separated by;):** Hamilton systems; Hamiltonian-Jacobi equations; Mather theory; weak KAM theory; viscosity solutions



## 结题摘要

**中文摘要（对项目的背景、主要研究内容、重要结果、关键数据及其科学意义等做简单概述）：**

Hamilton 系统是动力系统理论重要的研究领域之一，具有丰富的内涵，Hamilton 系统的动力学稳定性问题是一个古老而未能完全解决的问题，粗略地讲，大多数近可积系统的大部分运动在动力学意义下是稳定的（根据 KAM 理论），同时，不稳定的轨道在相空间内有可能稠密（Arnold 扩散）。上个世纪90年代，由 J. Mather 开创的高维正定 Lagrangian 系统的极小变分方法，导致正定系统的 Arnold 扩散的研究取得了突破性的进展。用变分的观点研究 Hamilton 系统的动力学不稳定性有其优势。这时可以从考虑Lagrange 系统入手。正定 Hamilton 系统的研究与正定 Lagrange 系统的研究等价。90年代后期，Fathi 等发展了关于Hamilton-Jacobi 方程的弱KAM理论。弱KAM理论作为桥梁沟通了 Mather 理论和 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的联系，后者自上世纪60-70 年代发展起来，在PDE、最优控制等领域得到了巨大发展。同时也为Arnold扩散提供了新的方法，为 Hamilton 系统的不稳定性研究开辟了新的道路。程伟等人利用Hamilton-Jacobi方程粘性解的半凹性理论等，给出了力学系统不稳定性的一些结果。

我们的研究主要围绕以下问题展开：一、Hamilton-Jacobi 方程粘性解的奇点传播条件；二、与Hamilton系统有很大关系的双曲守恒律的解的形态；三、Hamilton-Jacobi 方程粘性解的奇点传播与Hamilton 系统不稳定性之间的关系；四、关于局部极小不变集的研究。

得到了一类系统的奇点传播条件，研究了Hamilton-Jacobi方程与双曲守恒律之间的联系。

**Abstract (Brief description of research background, main methods, contributions, and research data):**

As all known, Hamiltonian systems is the most important field. In Hamiltonian mechanics, various questions and results concern whether there exists an orbit which in the infinite past tends to one region of phase space and in the infinite future tends to another region of phase space. It is well known, by KAM theory, that invariant simple closed curves for such diffeomorphisms often exist. Fathi development the theory of the weak KAM for Hamiltonian-Jacobi equations.

In the study of the fund, we studied the singularity of the viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equations. Meanwhile we studied the relationship of the solutions of the systems Hyperbolic conservation law and the Hamilton-Jacobi equations.



**关键词（用分号分开）：** Hamilton系统； 粘性解； 双曲守恒律； 奇异性；

**Keywords (separated by;):** Hamilton system; viscosity solution; hyperbolic conservation law; singularity;



## 正文

《结题/成果报告》正文分为两个部分：**结题部分**和**成果部分**。请按照《结题/成果报告》填报说明及撰写要求填写。

### (一) 结题部分

#### 1. 研究计划执行情况概述。

##### (1) 按计划执行情况。

第一阶段(2016. 1. -2016. 12.)

完成了文献搜集和阅读, 完整掌握半凹函数的性质, 粘性解理论及维数理论。与南大、复旦及国际学术同行交流粘性解和弱 KAM 理论, 并一起探讨粘性解和障碍函数的更深层次的联系。

第二阶段(2017. 1. -2017. 12.)

借助于粘性解的半凹性质, 对双曲守恒律的解的形态进行了分析, 并对 hamilton 系统与双曲守恒律系统进行了比较和分析。

第三阶段(2018. 1. -2018. 12.)

在前两年工作的基础上, Hamilton 系统的连接轨道的研究上取得进展。参加了国内学术会议。

##### (2) 研究目标完成情况。

在整个项目中, 完成科研论文 3 篇, 完善了 Mather 的变分理论, 深化了 Hamilton 系统的不稳定性的理解。找到了 Hamilton 系统与双曲守恒律之间的紧密联系与区别。同时培养了一些对微分方程的稳定性和双曲守恒律感兴趣的本科生和研究生。

#### 2. 研究工作主要进展、结果和影响。

##### (1) 主要研究内容。

我们的研究主要围绕以下问题展开:

- 一、Hamilton-Jacobi 方程粘性解的奇点传播条件;
- 二、与 Hamilton 系统有很大关系的双曲守恒律的解的性态;
- 三、Hamilton-Jacobi 方程粘性解的奇点传播与 Hamilton 系统不稳定性之间的关系;
- 四、关于局部极小不变集的研究。

(3) 取得的主要研究进展、重要结果、关键数据等及其科学意义或应用前景。



通过本项目的研究，我们完善了 Mather 的变分理论，进一步研究了关于 Hamilton-Jacobi 方程的弱 KAM 理论。深化了 Hamilton 系统的不稳定性的理解。找到了 Hamilton 系统与双曲守恒律之间的紧密联系与区别。利用 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的半凹性理论等，给出了力学系统不稳定性的一些结果。同时培养了一些对微分方程的稳定性和双曲守恒律感兴趣的本科生和研究生。

### 3. 研究人员的合作与分工。

研究生邱召阳主要完成了半凹函数的性质的研究；  
博士生刘树君进行了双曲守恒律与 Hamilton 系统的联系的研究；  
主持人进行了 Hamilton-Jacobi 方程奇性的研究。

### 4. 国内外学术合作交流等情况。

每年都参加各种学术会议、研讨班，邀请国内外专家进行学术交流。

### 5. 存在的问题、建议及其他需要说明的情况。

有关障碍函数的问题，还需要进一步深入研究。

## （二）成果部分

### 1. 项目取得成果的总体情况。

完成了 SCI 论文 3 篇，在投文章 2 篇。

### 2. 项目成果转化及应用情况。

暂时没有应用。

### 3. 人才培养情况。

培养了相关方向的研究生和博士生 2 名。

### 4. 其他需要说明的成果。

无。

### 5. 项目成果科普性介绍或展示网站。

无。



## 研究成果目录

项目负责人通过ISIS系统，从文献库中检索研究成果或者按要求格式自行填入。请按照期刊论文、会议论文、学术专著、专利、会议报告、标准、软件著作权、科研奖励、人才培养、成果转化的顺序列出，其它重要研究成果如标本库、科研仪器设备、共享数据库、获得领导人批示的重要报告或建议等，应重点说明研究成果的主要内容、学术贡献及应用前景等。

项目负责人不得将非本人或非参与者所取得的科研成果，以及与受资助项目无关的科研成果列入报告中。发表的科研成果，项目负责人和参与者均应如实注明得到国家自然科学基金项目资助和项目批准号，科学基金作为主要资助渠道或者发挥主要资助作用的，应当将自然科学基金作为第一顺序进行标注。

### 期刊论文

#### 1. 既非第一作者又非通讯作者论文

(1) Zejun Wang, Qi Zhang, Periodic solutions to p-system constructed through Glimm scheme, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 435: 1088~1098, SSCI, 第二标注

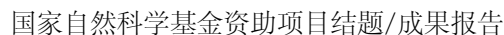
(2) Zejun Wang, Qi Zhang, FINITE TIME EMERGENCE OF A SHOCK WAVE FOR SCALAR CONSERVATION LAWS VIA LAX-OLEINIK FORMULA, 数学物理学报（英文版）, 2019, 39B(1): 1~11, 第一标注

(3) Cui Chen, Wei Cheng, Qi Zhang, Lasry-Lions approximations for discounted Hamilton-Jacobi equations, J. Differential Equation, 2018, 265: 719~732, 第二标注

## 项目成果应用前景

本项目成果拟应用领域：1、偏微分方程中的流体动力学

预计在5-10年推广使用

[illegible]





## 国家自然科学基金项目资金决算表（定额补助）

项目批准号：11501290

项目负责人：张琦

金额单位：万元

序号	科目名称	预算数			累计支出数	结余
		批准预算	预算调整数	调整后预算		
		(1)	(2)	(3) = (1) + (2)		
1	合计	18.0000	0.0000	18.0000	0.9987	17.0013
2	1、设备费	2.0000	0.0000	2.0000	0.0000	2.0000
3	（1）设备购置费	2.0000	0.0000	2.0000	0.0000	2.0000
4	（2）设备试制费	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	（3）设备升级改造与租赁费	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	2、材料费	2.0000	0.0000	2.0000	0.0000	2.0000
7	3、测试化验加工费	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	4、燃料动力费	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	5、差旅/会议/国际合作与交流费	8.1000	0.0000	8.1000	0.9634	7.1366
10	6、出版/文献/信息传播/知识产权事务费	2.0000	0.0000	2.0000	0.0353	1.9647
11	7、劳务费	2.4000	0.0000	2.4000	0.0000	2.4000
12	8、专家咨询费	1.5000	0.0000	1.5000	0.0000	1.5000
13	9、其他支出	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

注:1. 本表中（1）、（3）、（5）栏为系统自动生成，不需项目负责人填写； 2. 本表中（2）栏填列经批准的预算调整数； 3. 本表中（4）栏填列项目的实际支出数；



## 决算说明书（定额补助）

（请说明项目预算的调整及执行情况、合作研究外拨资金情况、单笔总额10万元（含）以上的设备名称及使用情况、资金管理和使用过程中遇到的问题及建议，以及其他需要说明的事项。）

一、科研经费（直接经费）总额：18万，已花销：0.9987万，余额：17.0013万。

二、明细：

1、差旅费：预算8.1万，已花费：0.9634万；

2、技术资料费：预算2万，已花费：0.0353万。



## 签字及审核意见表

## 项目负责人承诺：

我所承担的项目（编号：11501290 名称：Hamilton-Jacobi方程的广义特征线的研究）结题报告内容真实，数据准确，未出现《国家科学技术保密规定》中列举的属于国家科学技术秘密范围的内容。在今后的研究工作中，如有与本项目相关的成果，将如实注明得到国家自然科学基金项目资助和项目批准号，并报送国家自然科学基金委员会。

项目负责人（签章）：

日期：

## 依托单位科研管理部门：

负责人（签章）：

日期：

## 依托单位财务管理部门：

负责人（签章）：

日期：

## 依托单位审查意见：

依托单位公章：

## 科学处审核意见：

完成情况  
综合评分  
(划√)

优

良

中

差

负责人（签章）：

日期：

## 科学部核准意见（对重点项目等）：

负责人（签章）：

日期：

## 分管委领导意见（对重大项目等）：

委领导（签章）：

日期：



## 电子附件目录

序号	附件类型	附件名称	备注
1	论著	Periodic solutions to p-system	
2	论著	Lasry - Lions approximations for discounted Hamilton	
3	论著	FINITE TIME EMERGENCE OF A SHOCK WAVE	